Mathématiques http://ac01.e-monsite.com	LOGARITHME ET CALCUL D'AIRE	$4^{ème}$ Mr : Chortani A

Blague : Logarithme et Exponentielle vont ensemble au cinéma. Lequel invite l'autre ?
Réponse : exponentielle, car logarithme népérien (ne peut rien).

Exercice

I) Soit g la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞[par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.
1) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle] 0 ; + ∞[.
2) Calculer g(1) et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle] 0 ; + ∞[.
II) Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle] 0 ; + ∞[, on pose:

$$f(\boldsymbol{x}) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$$

et φ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)a) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.
b) Déterminer la limite de la fonction f en +∞.
2)a) Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle] 0 ; + ∞[,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle]0 ; + ∞[.
3) a) Justifier que la droite D d'équation $y = x - 1$est asymptote à la courbe φ.
b) Etudier les positions relatives de la courbe φ et de la droite D.
c) Tracer la droite D et la courbe φ dans le plan P muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
4)Calculer $\mathcal{A}$ la mesure exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe φ, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

Correction

I)1)$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ car $x \in]0\,;+\infty[$.

donc g est strictement croissante sur l'intervalle] 0 ; + ∞[.

2) g(1) = 1² - 1 + ln 1 = 0

x	0		1		+∞
$g(x)$		−	0	+	

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x-1}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to -\infty} = +\infty$

donc droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe φ

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{x-1}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} = +\infty$

2)a)

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x}\times x - 1\times \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f'(x)$ est du signe de g(x) sur]0 ; + ∞[, on en déduit les variations de f :

x	0		1		∞
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

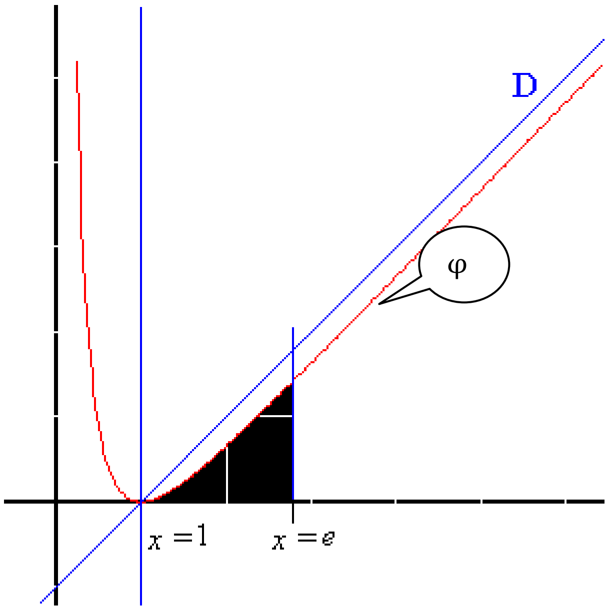
3)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe φ en + ∞.

b)

x	0		1		∞
$f(x)-(x-1) = -\frac{\ln(x)}{x}$		+	0	−	
position		φ/D	φ=D = (1 ; 0)	D/ φ	

c)



4) $\mathcal{A} = 4\int_1^e f(x)dx = 4\left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = (2e^2 - 4e)\ cm^2$